**Лекция 19**

*Метрические пространства*

На множестве *M* задана метрика если определена функция , называемая метрикой и обладающая свойствами:

* – свойство диагонали.
* – свойство симметрии.
* – неравенство треугольника.

Метрическое пространство - пара . Элементы множества – точки данного метрического пространства.

Расстояние между подмножествами множества -

Открытый шар (параллелепипед) - , где .

Замкнутый шар (параллелепипед) - , где

Ограниченное множество – множество, являющееся подмножеством некоторого шара конечного шара.

Внутренняя точка подмножества *K* множества *M –* точка, принадлежащая подмножеству *K* вместе с открытым шаром, центром которого она является.

Открытое множество – множество, все точки которого внутренние.

Открытая окрестность - всякое открытое множество метрического пространства , содержащее множество .

Множество - окрестность множества , если оно содержит его открытую окрестность.

Предельная точка множества – такая точка, в окрестности которой есть точка, отличная от данной.

Граничная точка множества – такая точка, в любой окрестности которой есть как точки, принадлежащие , так и точки, принадлежащие .

Граница множества - множество граничных точек множества .

Замкнутое множество – множество, содержащие все свои предельные точки.

Если - множество всех предельных точек множества , то множество - замыкание множества .

Множества и покрывают множество , если .

Подмножество метрического пространства связное, если его нельзя покрыть никакими двумя открытыми непересекающимися подмножествами множества . Открытое связное множество называют областью, а замкнутое связное множество называют континуумом.

– замкнутая область.

Компактное множество – такое множество, что его любое бесконечное подмножество имеет предельную точку, принадлежащую .

Функция – последовательность в

Если – конечное, то последовательность конечна, иначе бесконечна.

Функция на сужении множества - – подпоследовательность.

Последовательность ограниченная, если .

Последовательность сходится к точке при , если .

Множество метрического пространства называется компактным, если у любой его бесконечной последовательности существует подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке этого пространства. Если компактно множество , то пространство называется компактным.

Множество – всюду плотно, если для любой точки существует сходящаяся к ней последовательность

Сепарабельное пространство – метрическое пространство, у которого существует счётное всюду подмножество.

Фундаментальная последовательность (последовательность Коши) – последовательность, к которой .

Полное метрическое пространство – пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится.

Пополнение метрического пространства – полное метрическое пространство, содержащее , как всюду плотное своё подмножество. Теорема Ф.Хаусдорфа говорит о том, что это пополнение всегда существует.

Нормированное пространство – пространство , на котором определена функция нормы , которая при любых удовлетворяет свойствам:

Векторное пространство с заданной на нём нормой – векторное нормированное пространство.

Изометрический изоморфизм – изоморфизм из одного векторного нормированного пространства в другое, в котором норма элемента одного пространства равно норме образа этого же элемента в другом пространстве.

Изометрически изоморфные пространства – векторные нормированные пространства, на которых задан изоморфизм.

Можно отождествить все изоморфные нормированные пространства.

Можно задать метрику на нормированном пространстве: .

Подпространством нормированного пространства - замкнутое векторное подпространство этого пространства.

Банахово пространство - полное нормированное пространство. Всякое подпространство банахова пространства – банахово пространство.

Пополнение нормированного пространства – банахово пространство, содержащее данное пространство как плотное свое подмножество.

Отношение эквивалентности на множество всех фундаментальных подмножеств нормированного пространства : , для любых . Следовательно, - объединением непересекающихся своих подмножеств – классов эквивалентности, эквивалентных между собой последовательностей. Множество этих классов -

Для любых , существует единственный класс , такой, что из , верно равенство

Чтобы наделить множество структурой векторного пространства для любых , полагают . Для любого норму определяют формулой , где .

Стационарная последовательность – последовательность, в которой начиная с некоторого, все элементы равны между собой.

**Теорема Хаусдорфа:**

* *­* - векторное нормированное пространство, - векторное нормированное пространство классов эквивалентных последовательностей, - линейное многообразие в классов эквивалентности, содержащих стационарные последовательности.

Тогда – банахово постранство, – плотно в и изометрически изоморфно .

* – банахова пространство, – плотное в линейное многообразие, рассматриваемое как нормированное пространство с той же нормой.

Тогда попленение изометрически изоморфно , что означает, что пополнение нормированного пространства единственно с точностью до изометрического изоморфизма.

Векторное пространство над полем наделено структурой предгильбертово пространства над , если задана функция скалярного произведения , удовлетворяющая условиям:

для любых .

Предгильбертого пространство – пара .

Для векторов и множеств выполняется условие ортагональности, если:

Аннулятор множества называют .

Для того, чтобы нормированное пространство было предгильбертовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух его элементов выполнялось равенство .

Из вышеописанных аксиом выводятся:

* для любых
* , где - подпространство .

Угол между векторами : .

Гильбертово пространство – предгильбертово пространство, полное относительно нормы .

Подпространство сепарабельного гильбертова пространства является сепарабельным гильбертовым пространством.

Аннулятор подпространства гильбертова пространства является гильбертовым пространством, причём

Пространства являются ортагональными дополнениями друг друга.

Любой вектор из гильбертова пространства представим в виде суммы векторов из и .

В этом случае говорят, что гильбертово пространство разлагается в ортогональную сумму своих подпространств и .

Если - выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве, то для любого существует единственный элемент такой, что . – проекция на .

Пусть – множество индексов. Ненулевые элементы – ортагональная система, если . Элементы – ортонормальная система, если и . Если - ортагональная система, то – ортонормальная система.

Множество векторов любой ортогональной системы линейно независимо. Из любого набора линейно-независимых элементов можно построить ортонормальную систему, используя ортагонализацию Шмидта.

Любая ортогональная система сепарабельного гильбертового пространства является ортогональной последовательностью, то есть состоит не более, чем из счетного множества векторов.

Числа – коэффициенты Фурье элементы , если – ортонормальная система в предгильбертовом пространстве.

Коэффициенты Фурье при любой ортонормальной системе предгильбертова пространства удовлетворяют неравенству Бесселя:

Ортонормальная последовательность в сепарабельном гильбертовом пространстве полная, если не существует, кроме нуля, другого элемента этого же элемента этого же пространства, ортогонального всем элементам пространства.

Для полной ортонормальной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве , которое является необходимым и достаточным условием полноты этой системы в этом пространстве. Полная упорядоченная ортонормальная система в сепарабельном сепарабельном пространстве – ортонормальный базис:

* , или, что то же самое

В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортогональный базис.

Вещественные конечномерные гильбертовы пространства – евклидов.

Комплексные конечномерные гильбертовы пространства – унитарные.

Конечномерное предгильбертово пространство – гильбертово евклидово или унитарое.

Сепарабельные гильбертовы пространства одинаковой размерности изометрически изоморфны.

*Пространства*

- множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел. Данное множество вместе с различными определёнными на нём структурами – пространство .

Для наделения множества структурой евклидова пространства можно предположить: для любых .

Размерность евклидова пространства равна .

Любое евклидово пространство размерности изометрически изоморфно евклидову пространству . Если – какой-нибудь базис в , то этот изоморфизм можно задать формулой